Correction

Épreuve anticipée de mathématiques - Sujet 0

Voie technologique - 1e sujet

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Question 1

Jean consacre 25% de sa journée de dimanche à faire ses devoirs.
80% du temps consacré à ses devoirs est consacré à faire un exposé.

Le pourcentage du temps consacré à l'exposé par rapport à la journée de dimanche est égal à $\frac{1}{4} \times 80\%$.

En effet, le temps consacré à l'exposé représente 80% de 25% de la journée de dimanche.

$$\begin{aligned} \text{Or } 80\% \text{ de } 25\% &= \frac{80}{100} \times \frac{25}{100} \\ &= \frac{80}{100} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{80}{100} \\ &= \boxed{\frac{1}{4} \times 80\%} \end{aligned}$$

La réponse correcte est donc la réponse [b]B. [/b]

Question 2

Un prix diminue de 50%. Pour retrouver le prix initial, il faut une augmentation de 100%.

Soit P le prix initial.
Le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 50% est 1 - 0,5 = 0,5.
D'où le prix après la diminution de 50% est $0,5\,P$.

Soit x le pourcentage d'augmentation permettant de retrouver le prix initial.
Le coefficient multiplicateur correspondant à cette augmentation est $1+\frac{x}{100}$

Nous obtenons donc la relation : $\left(1+\frac{x}{100}\right) \times 0,5\,P = P$.

$$\begin{aligned} \text{Or } \left(1+\frac{x}{100}\right) \times 0,5\,P = P &\iff \left(1+\frac{x}{100}\right) \times 0,5 = 1 \\ &\iff \left(1+\frac{x}{100}\right) \times \frac{1}{2} = 1 \\ &\iff 1+\frac{x}{100} = 2 \\ &\iff \frac{x}{100} = 1 \\ &\iff \boxed{x = 100} \end{aligned}$$

Donc pour retrouver le prix initial, il faut une augmentation de 100%.

La réponse correcte est donc la réponse [b]B. [/b]

Question 3

Le prix d'une tablette a baissé : il est passé de 250 euros à 200 euros.
Cela signifie que ce prix a été multiplié par **0,8.**

Cela revient à calculer $\dfrac{200}{250}$

Or $$\begin{aligned}\frac{200}{250} &= \frac{4\times 200}{4\times 250}\\ &= \frac{800}{1000}\\ &= \boxed{0,8}\end{aligned}$$

La réponse correcte est donc la réponse [b]C. [/b]

Question 4

La seule égalité vraie est $\dfrac{10^{-5}}{10^{8}} = 10^{-13}$

En effet, $\dfrac{10^{-5}}{10^{8}} = 10^{-5-8} = 10^{-13}$.

La réponse correcte est donc la réponse [b]C. [/b]

Montrons que les autres égalités sont fausses.

A. $40 \times \dfrac{1}{40^3} = 40^{1-3} = 40^{-2} \neq 40^2$

B. $(2^{-4})^3 = 2^{-4\times 3} = 2^{-12} \neq 2^{-1}$

D. $5^{-6} \times 11^{-6} = (5\times 11)^{-6} = 55^{-6} \neq 55^{-12}$

Question 5

L'épaisseur d'une feuille de papier est égale à 70×10^{-3} mm.
L'épaisseur d'une pile de 2000 feuilles est égale à **14 cm.**

En effet,

$$\begin{aligned}2000 \times 70 \times 10^{-3}\text{ mm} &= \frac{2\times 10^3 \times 70}{10^3}\text{ mm}\\ &= 2\times 70\text{ mm}\\ &= 140\text{ mm}\\ &= \boxed{14\text{ cm}}\end{aligned}$$

Question 6

Voici quatre planètes et leur masse.

Terre	$5\,973 \times 10^{21}$kg
Mercure	$33,02 \times 10^{22}$kg
Vénus	$48\,685 \times 10^{20}$kg
Mars	$6,4185 \times 10^{23}$kg

La planète dont la masse est la plus importante est **la Terre.**

En effet, voici les quatre planètes et leur masse :

Terre : $5\,973 \times 10^{21}\text{kg} = 5,973 \times 10^{3} \times 10^{21}\text{kg} = 5,973 \times 10^{24}\text{kg}$
Mercure : $33,02 \times 10^{22}\text{kg} = 3,302 \times 10^{1} \times 10^{22}\text{kg} = 3,302 \times 10^{23}\text{kg}$
Vénus : $48\,685 \times 10^{20}\text{kg} = 4,8685 \times 10^{4} \times 10^{20}\text{kg} = 4,8685 \times 10^{24}\text{kg}$
Mars : $6,4185 \times 10^{23}\text{kg}$

Nous observons que : $3,302 \times 10^{23} < 6,4185 \times 10^{23} < 4,8685 \times 10^{24} < 5,973 \times 10^{24}$

Par conséquent, **la planète dont la masse est la plus importante est** [b]la Terre.

[/b]**La réponse correcte est donc la réponse** [b]A. [/b]

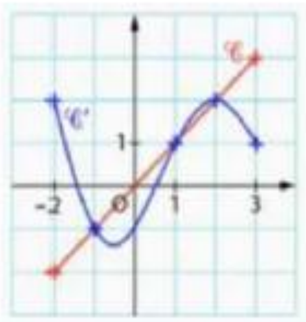
Question 7

On additionne un nombre réel x , avec son triple et son carré.
Le résultat est égal à : $4x + x^2$

En effet, la séquence revient au calcul de $x + 3x + x^2$, soit $\boxed{4x + x^2}$.
La réponse correcte est donc la réponse [b]D. [/b]

Question 8

Dans la figure ci-dessous, les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ représentent respectivement les fonctions f et g.

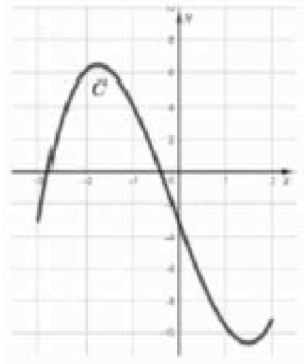


L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ est $[-2\,;\,-1] \cup [1\,;\,2]$.

La courbe $\mathscr{C}$ est en-dessous de la courbe $\mathscr{C}'$ sur l'ensemble $[-2\,;\,-1] \cup [1\,;\,2]$.
La réponse correcte est donc la réponse [b]C. [/b]

Question 9

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 2].



On s'intéresse à l'équation $f(x) = 0$.

Les solutions (si elles existent) de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.
Par une lecture graphique, nous observons que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points dont les abscisses sont négatives.
La réponse correcte est donc la réponse [b]C. [/b]

Question 10

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de signes est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

La seule expression possible proposée pour la fonction f est $f(x) = -3x + 6$.

En effet, les quatre expressions proposées définissent quatre fonctions affines.
En observant le tableau de signes, nous déduisons que $f(2) = 0$.
Seules les expressions **A** et **C** vérifient cette relation.

En outre, le tableau de signes de $f(x)$ montre que pour tout $x > 2$, $f(x) < 0$.

Choisissons une valeur de x supérieure à 2.
Par exemple, $x = 3$.
D'après le tableau, nous devons obtenir : $f(3) < 0$.

Selon l'expression **A**, nous obtenons : $f(3) = -9 + 6 = -3 < 0$ et selon l'expression **C** , nous obtenons : $f(3) = 3 - 2 = 1 > 0$
Par conséquent, la seule expression proposée pour la fonction f est l'expression **A** : $f(x) = -3x + 6$.
La réponse correcte est donc la réponse [b]A. [/b]

Question 11

On considère la relation $C = (1 + t)^2$.
On cherche à isoler t.
On a : $t = \sqrt{C} - 1$.

En effet,

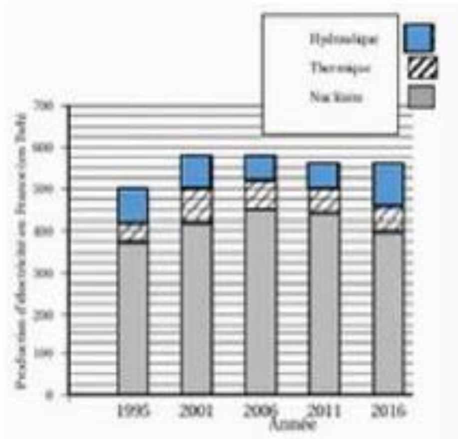
$$C = (1+t)^2 \iff \sqrt{C} = 1 + t \quad \text{avec } 1 + t \geqslant 0, \text{soit } t \geqslant -1$$

$\Longleftrightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{C} - 1}$

La réponse correcte est donc la réponse [b]B. [/b]

Question 12

Le diagramme en barres ci-dessous donne la production d'électricité, en Twh (térawatt-heure) selon son origine (source : INSEE).



L'année où la production d'électricité d'origine hydraulique était la plus importante est : 2016.
La réponse correcte est donc la réponse [b]D. [/b]

DEUXIÈME PARTIE (14 pts)

Exercice 1 (X points)

Une biologiste désire étudier l'évolution de la population de singes sur une île.
En 2025, elle estime qu'il y a 1000 singes sur l'île.

A : Premier modèle

Chaque année, la population de singes baisse de 10%.

1. Montrons qu'en 2026, il y aura 900 singes sur l'île.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une baisse de 10% est $1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,1 = 0,9$.
Le nombre de singes sir l'île en 2026 est donc égal à $0,9 \times 1\,000 = 900$.
Par conséquent, **en 2026, il y aura 900 singes sur l'île.**

2. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de singes sur l'île pour l'année $2025 + n$.
On a donc $u_0 = 1\,000$.

2. a) u_2 représente le nombre de singes en 2027.

Calculons u_2.

Nous savons par la question 1. que $u_1 = 900$.
D'où $u_2 = 0,9 \times u_1 = 0,9 \times 900 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{u_2 = 810}$

2. b) D'après ce premier modèle, nous obtenons : $u_{n+1} = 0,9 \times u_n$ pour tout entier naturel n.

Nous en déduisons que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $u_0 = 1\,000$.

2. c) Nous devons donner les variations de cette suite.

Nous savons qu'une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$ est strictement décroissante si et seulement si $q < 1$.

Or $\begin{cases} q = 0,9 \\ u_0 = 1\,000 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} 0 < q < 1 \\ u_0 > 0 \end{cases}}$

Par conséquent, **la suite (u_n) est strictement décroissante.**

3. Montrons que selon ce modèle, la population de singes est menacée d'extinction.

Le terme général de la suite (u_n) est $u_n = u_0 \times q^n$.
Nous obtenons ainsi pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = 1\,000 \times 0,9^n}$.

$$\begin{aligned} \text{Or } 0 < 0,9 < 1 \quad &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 0,9^n = 0 \\ &\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} 1000 \times 0,9^n = 0 \\ &\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0} \end{aligned}$$

Par conséquent, **selon ce modèle, la population de singes est effectivement menacée d'extinction.**

B : Second modèle

On admet que l'évolution du nombre de singes est modélisée par la suite (v_n) ainsi définie :

$$\begin{cases} v_{n+1} = 0,9v_n + 150\,; \quad n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 1\,000 \end{cases}$$

où v_n désigne le nombre de singes sur l'île pour l'année $2025 + n$.

1. Avec ce modèle, déterminons la population de singes en 2026.

Le rang de v_n correspondant à l'année 2026 est $n = 1$ car $2026 = 2025 + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Or} \quad v_1 &= 0,9v_0 + 150 \\ &= 0,9 \times 1\,000 + 150 \\ &= 900 + 150 \\ &= 1\,050 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{v_1 = 1\,050}$

Donc **avec ce modèle, la population de singes en 2026 sera de 1050 singes.**

2. La feuille de calcul ci-dessous donne les valeurs arrondies à l'unité des premiers termes de la suite (v_n).

	A	B
1	n	Vn
2	0	1000
3	1	1050
4	2	1095
5	3	1136
6	4	1172
7	5	1205
8	6	1234
9	7	1261
10	8	1285
11	9	1306
12	10	1326
13	11	1343
14	12	1359
15	13	1373
16	14	1386
17	15	1397
18	16	1407
19	17	1417
20	18	1425
21	19	1432

Pour obtenir les termes de la suite (v_n), nous devons saisir dans la cellule B3, la formule suivante destinée à être étirée vers le bas : = 0,9*B2+150

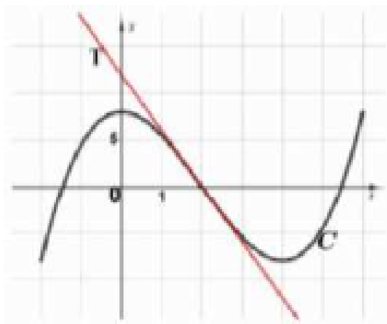
3. Nous devons indiquer en quelle année la population de singes dépassera pour la première fois 1400 individus.

La feuille de calcul nous indique que v_n est supérieur à 1400 pour la première fois lorsque $n = 16$.
Cela correspond à l'année $2025 + 16 = 2041$.

Donc, **en 2041, la population de singes dépassera pour la première fois 1400 individus.**

Exercice 2 (X points)

On considère une fonction f définie et dérivable que l'intervalle [-2 ; 6].
Sa courbe représentative, notée $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous.



- On sait que la courbe $\mathscr{C}$ passe par les points de coordonnées (0 ; 8), (2 ; 0) et (4 ; -8).
- On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 2$.
- On sait que la tangente T coupe l'axe des ordonnées en $y = 12$.

1. a) Nous devons déterminer les valeurs de $f(2)$ et $f'(2)$.

- $\boxed{f(2) = 0}$ car la courbe $\mathscr{C}$ passe par le point de coordonnées $(2\,;0)$.

- Déterminons $f'(2)$.

$f'(2)$ représente le coefficient directeur de la tangente T.
La tangente T passe par les points de coordonnées $(2\,;\,0)$ et $(0\,;\,12)$ notés respectivement A et B.

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} f'(2) &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{12 - 0}{0 - 2} \\ &= -6 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{f'(2) = -6}$

1. b) Nous devons donner une équation de la tangente T.

Une équation de la tangente T est de la forme $\boxed{y = ax + b}$.

- Le coefficient directeur de la tangente T est $f'(2) = -6$.

Donc $a = -6$.

- La tangente T passe par le point de coordonnées $(0\,;\,12)$.

Dès lors, l'ordonnée à l'origine de T est 12.
Donc $b = 12$.

Par conséquent, **une équation de la tangente T est** $\boxed{y = -6x + 12}$.

1. c) Tableau de variation de f complété à l'aide des questions précédentes et du graphique.

x	-2		0		4		6
Variations de f	-8	$\nearrow$	8	$\searrow$	-8	$\nearrow$	8

2. On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle [-2 ; 6] par $f(x) = 0,5x^3 - 3x^2 + 8$.

2. a) Montrons que pour tout réel x de l'intervalle [-2 ; 6], nous avons : $f'(x) = 1,5x(x - 4)$.

Pour tout réel x de l'intervalle [-2 ; 6],

$$\begin{aligned} f'(x) &= (0,5x^3 - 3x^2 + 8)' \\ &= 0,5 \times 3x^2 - 3 \times 2x + 0 \\ &= 1,5x^2 - 6x \\ &= 1,5x^2 - 1,5 \times 4x \\ &= 1,5x(x - 4) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\forall\, x \in [-2\,;\,6],\quad f'(x) = 1,5x(x-4)}$

2. b) Nous devons étudier le signe de $f'(x)$ et retrouver le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 6].

Étudions le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [-2 ; 6].

$$\begin{array}{lcl} 1,5x > 0 & \Longleftrightarrow & x > 0 \\ 1,5x = 0 & \Longleftrightarrow & x = 0 \\ 1,5x < 0 & \Longleftrightarrow & x < 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} x-4 > 0 & \Longleftrightarrow & x > 4 \\ x-4 = 0 & \Longleftrightarrow & x = 4 \\ x-4 < 0 & \Longleftrightarrow & x < 4 \end{array}$$

x	-2		0		4		6
$1,5x$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-4$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 6].

$$\begin{aligned} f(-2) &= 0,5\times(-2)^3-3\times(-2)^2+8 \\ &= 0,5\times(-8)-3\times4+8 \\ &= -4-12+8 \\ &= -8 \end{aligned}$$

$f(0) = 8$

$f(4) = -8$

$$\begin{aligned} f(6) &= 0,5\times6^3-3\times6^2+8 \\ &= 0,5\times216-3\times36+8 \\ &= 108-108+8 \\ &= -8 \end{aligned}$$

x	-2		0		4		6
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	-8	$\nearrow$	8	$\searrow$	-8	$\nearrow$	8

Nous retrouvons ainsi le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 6] dressé dans la question 1. c).

3. On admet que pout tout réel x de l'intervalle $[0\,;2]$, on a $f(x) \leqslant -6x+12$.
Que pouvons-nous en déduire pour la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T sur l'intervalle $[0\,;2]$?

La relation $f(x) \leqslant -6x+12$ vérifiée sur l'intervalle $[0\,;2]$ signifie que **sur cet intervalle $[0\,;2]$, la courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de la tangente T.**

Merci à Hiphigenie et malou pour avoir contribué à l'élaboration de cette fiche