Correction

Épreuve anticipée de mathématiques - Sujet 0

Ens scientifique - 3e sujet

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

1. Nous devons donner un ordre de grandeur de 101×99.

Nous obtenons : $101 \times 99 \approx 100 \times 100 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{101 \times 99 \approx 10\,000}$
La réponse correcte est donc la réponse [b]c. [/b]

2. Un prix augmente de 20% puis diminue de 20%.
Après ces deux évolutions, on peut affirmer que **le prix est strictement inférieur à sa valeur de départ.**

Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 20% est $1+0,2=1,2$.
Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 20% est $1-0,2=0,8$.
Le coefficient multiplicateur global associé après ces deux évolutions est $0,8 \times 1,2=0,96$

Puisque ce coefficient multiplicateur global est strictement inférieur à 1, **le prix final est strictement inférieur à sa valeur de départ.**
La réponse correcte est donc la réponse [b]c. [/b]

3. Nous devons déterminer par combien il faut multiplier une quantité positive pour que celle-ci diminue de 2,3%.

Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 2,3% est $1-0,023=0,977$.
La réponse correcte est donc la réponse [b]b. [/b]

4. Dans un lycée, 50 élèves étudient le Grec, ce qui représente 4% du nombre d'élèves inscrits dans ce lycée.

Le nombre d'élèves inscrits dans ce lycée est égal à **1250.**

Soit x le nombre d'élèves inscrits dans ce lycée.

Nous savons que 4% du nombre d'élèves inscrits représentent 50 élèves.

Dès lors,

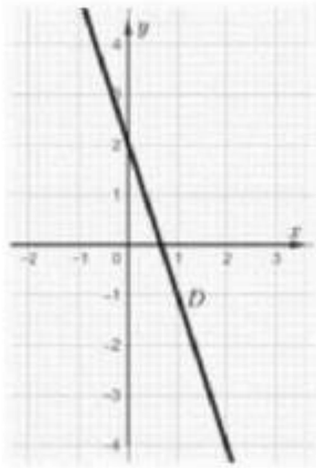
$$\begin{aligned}\frac{4}{100} \times x = 50 \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{100}{4} \times 50\\ &\Longleftrightarrow \quad x = 25 \times 50\\ &\Longleftrightarrow \quad \boxed{x = 1\,250}\end{aligned}$$

La réponse correcte est donc la réponse [b]d. [/b]

5. Le volume d'un glacier diminue de 3% chaque année.
   Si $V(n)$ désigne le volume du glacier pour l'année n , on a : $V(n+1) = 0,97 \times V(n)$.

Le coefficient multiplicateur associé à une diminution de 3% est $1 - 0,03 = 0,97$.
D'où $\boxed{V(n+1) = 0,97 \times V(n)}$
La réponse correcte est donc la réponse [b]c. [/b]

6. Dans un repère du plan, on a représenté une droite.



Le coefficient directeur de cette droite est égal à -3.

Par lecteur graphique, nous observons que les points $A(0\ ;\ 2)$ et $B(1\ ;\ -1)$ appartiennent à cette droite.

Le coefficient directeur m de cette droite est alors :

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{-1-2}{1-0} \\ &= -3 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{m = -3}$
La réponse correcte est donc la réponse [b]a. [/b]

7. Dix stylos coûtent en tout 13 euros.
   Le prix de trois stylos est égal à **3,90 euros.**

En effet, dix stylos coûtent en tout 13 euros.
Un stylo coûte 1,30 euro.

Trois stylos coûtent $3 \times 1,30 = 3,90$ **euros.**
La réponse correcte est donc la réponse [b]c. [/b]

8. Une athlète court 1 km en 5 minutes.

Sa vitesse moyenne est de **12 km/h.**

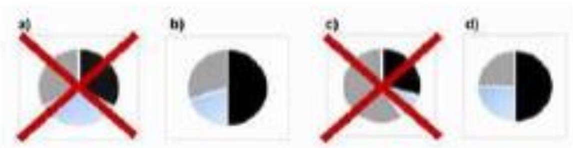
Nous savons que 1 heure = 12×5 minutes.

En 5 minutes, une athlète court 1 km.
En 12×5 minutes, elle parcourt 12 km.
Cela signifie qu'en 1 heure, l'athlète parcourt 12 km.
Par conséquent, **sa vitesse moyenne est de 12 km/h.**
La réponse correcte est donc la réponse [b]c. [/b]

9. Sur 60 personnes présentes à une exposition, on distingue trois groupes :

- groupe A : 30 personnes
- groupe B : 12 personnes
- groupe C : les autres.

Sur 60 personnes présentes, 30 personnes forment le groupe A, soit la moitié de l'effectif total.
La représentation graphique correcte est donc la b) ou la d).



Le groupe B compte 12 personnes et le groupe C en compte 30 - 12 = 18.
Les nombres de personnes étant différents dans les deux groupes, la représentation b) décrit la situation.

La réponse correcte est donc la réponse [b]b. [/b]

10. On considère les deux séries ci-dessous.
Série A : 9; 10; 10; 11 Série B : 7; 10; 10; 13.
L'écart-type de la série B est strictement supérieur à l'écart-type de la série A.

- La moyenne de la série A est $m_A = \dfrac{9+10+10+11}{4} = 10.$

La moyenne de la série B est $m_B = \dfrac{7+10+10+13}{4} = 10.$
Donc **les deux séries ont la même moyenne.**
Dès lors, les propositions a) et b) sont à écarter.

- Les deux séries ont le même effectif (4) et les mêmes valeurs centrales (10).

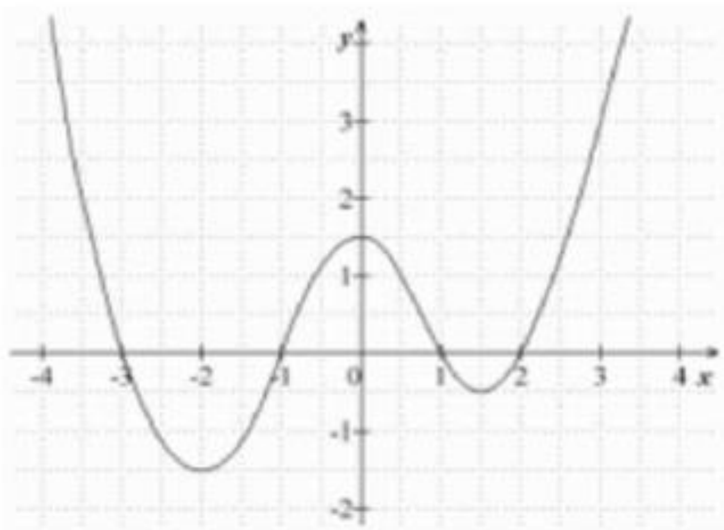
Nous observons que les valeurs extrêmes de la série A sont plus proches des valeurs centrales que celles de la série B.
Donc **l'écart-type de la série B est strictement supérieur à l'écart-type de la série A.**
La réponse correcte est donc la réponse [b]d. [/b]

11. Le volume V d'un cylindre de hauteur h et de rayon r est $V = \pi r^2 h$.

En isolant h, nous obtenons : $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$.

La réponse correcte est donc la réponse [b]c. [/b]

12. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-4 ; 4]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est $\mathcal{S} = \{-3 ; -1 ; 1 ; 2\}$.

En effet, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

La réponse correcte est donc la réponse [b]c. [/b]

DEUXIÈME PARTIE (14 pts)

Exercice 1 (X points)

Victor sort un plat du four. La température du plat est alors égale à 180°C. Il place le plat dans une pièce dont la température est égale à 25°C. Le plat refroidit.

Le plat ne pourra être servi que lorsque sa température sera devenue inférieure ou égale à 40°C.

Partie A : Premier modèle

On suppose que la baisse de la température du plat est proportionnelle à la durée du refroidissement, c'est-à-dire au nombre de minutes écoulées depuis la sortie du four.

On constate que 3 minutes après la sortie du four, la température du plat est égale à 105°C.

1. Nous devons déterminer de combien de degrés le plat a baissé en 3 minutes, en 1 minute.

- Lors de la sortie du four, la température du plat est égale à 180°C.

On constate que 3 minutes après la sortie du four, la température du plat est égale à 105°C.

Donc en 3 minutes, la température du plat a baissé de $180 - 105 = \boxed{75°C}$

• Nous savons que la baisse de la température du plat est proportionnelle au nombre de minutes écoulées depuis la sortie du four.

Donc en 1 minute, la température du plat a baissé de $\dfrac{75}{3} = \boxed{25^\circ\text{C}}$

2. Nous devons vérifier que la température du plat, 5 minutes après la sortie du four, est égale à 55°C.

En 1 minute, la température du plat a baissé de 25°C.
Donc en 5 minutes, la température du plat a baissé de $5 \times 25 = 125^\circ\text{C}$
Par conséquent, **5 minutes après la sortie du four, la température du plat est de** $180 - 125 = \mathbf{55^\circ C}$.

3. Nous devons déterminer quelle serait selon ce modèle, la température du plat 8 minutes après la sortie du four.

En 1 minute, la température du plat a baissé de 25°C.
Donc en 8 minutes, la température du plat a baissé de $8 \times 25 = 200^\circ\text{C}$
Par conséquent, **selon ce modèle, 8 minutes après la sortie du four, la température du plat serait de** $180 - 200 = \mathbf{-20^\circ C < 0}$ **!**

Manifestement, ce premier modèle n'est pas pertinent.

Partie B : Second modèle

Pour tout entier naturel n, on note U_n la différence entre la température du plat et la température de la pièce, n minutes après la sortie du four.

1. Nous devons justifier que $U_0 = 155$.

En effet, U_0 représente la différence entre la température du plat et la température de la pièce à la sortie du four.
Or la température du plat à la sortie du four est égale à 180°C et la température de la pièce est égale à 25°C.

D'où $U_0 = 180 - 25 \Longrightarrow \boxed{U_0 = 155}$

2. On suppose que chaque minute la différence U_n diminue de 20%.

2. a) Nous devons justifier que pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = 0,8\,U_n$.

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n - 0,2\,U_n \\ &= (1 - 0,2)\,U_n \\ &= 0,8\,U_n \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = 0,8\,U_n}$

2. b) Nous en déduisons que la suite (U_n) est géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $U_0 = 155$.

2. c) Nous devons exprimer U_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Le terme général de la suite (U_n) est $U_n = U_0 \times q^n$.
Nous obtenons ainsi pour tout entier naturel n, $\boxed{U_n = 155 \times 0,8^n}$.

2. d) On dispose des données suivantes :

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
U_n Arrondi à 10^{-1}.	80	64	51,2	41	32,8	26,2	21	16,8	13,4	10,7	8,6	6,9	5,5

Nous devons déterminer au bout de combien de minutes Victor pourra servir le plat.

Rappelons que le plat ne pourra être servi que lorsque sa température sera devenue inférieure ou égale à 40°C.

Dans ce cas, la différence entre sa température et la température de la pièce sera inférieure à 40 - 25 = 15°C.

Or le tableau nous indique que $U_{10} \approx 16,8$ et $U_{11} \approx 13,4$.

Par conséquent, **Victor pourra servir le plat au bout de 11 minutes .**

Exercice 2 (X points)
Un village propose aux participants de la fête du sport deux épreuves : une randonnée ou un cross.
Il n'est pas possible de s'inscrire aux deux épreuves à la fois.

1. a) Nous devons déterminer la probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club sachant qu'il a choisi la randonnée, soit $P_R(L)$.

On dispose de l'information suivante :

- 90% des participants ont choisi la randonnée et parmi eux, 5% sont licenciés dans un club.

  D'où $\boxed{P_R(L) = 0,05}$.

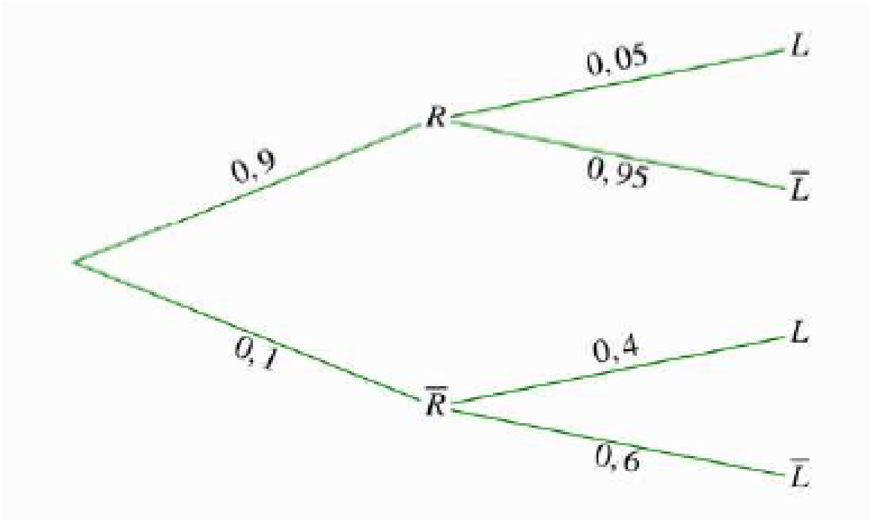
1. b) Nous devons déterminer la probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club sachant qu'il a choisi le cross, soit $P_{\overline{R}}(L)$.

On dispose de l'information suivante :

- 10% des participants ont choisi le cross et parmi eux, 40% sont licenciés dans un club.

  D'où $\boxed{P_{\overline{R}}(L) = 0,4}$.

2. Représentons la situation par un arbre de probabilité.



3. a) Nous devons déterminer la probabilité que le participant interrogé ait choisi le cross et soit licencié dans un club, soit $P(\overline{R} \cap L)$.

$$\begin{aligned} P(\overline{R} \cap L) &= P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(L) \\ &= 0,1 \times 0,4 \\ &= 0,04 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{P(\overline{R} \cap L) = 0,04}$

Par conséquent, **la probabilité que le participant interrogé ait choisi le cross et soit licencié dans un club est égale à 0,04, soit 4%.**

3. b) Nous devons vérifier que la probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club est égale à $\frac{850}{10\,000}$, soit 8,5%.

Les événements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers.
En utilisant la formule des probabilités totales, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P(L) &= P(R \cap L) + P(\overline{R} \cap L) \\ &= P(R) \times P_R(L) + 0,04 \\ &= 0,9 \times 0,05 + 0,04 \\ &= 0,085 \\ &= \frac{850}{10\,000} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{P(L) = \frac{850}{10\,000}}$

Par conséquent, **la probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club est égale à $\frac{850}{10\,000}$, soit 8,5%.**

4. Le journaliste estime que s'il choisit un participant parmi ceux qui sont licenciés dans un club, la probabilité qu'il ait effectué le cross sera largement supérieure à 50%.

Le journaliste interroge un participant licencié dans un club.
Déterminons la probabilité que ce participant ait choisi le cross.

Nous devons donc déterminer $P_L(\overline{R})$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
P_L(\overline{R}) &= \frac{P(\overline{R} \cap L)}{P(L)} \\
&= \frac{0,04}{\frac{850}{10\,000}} \\
&= \frac{0,04 \times 10\,000}{850} \\
&= \frac{400}{850}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{P_L(\overline{R}) = \frac{400}{850} < \frac{1}{2}}$$

D'où la probabilité que le participant ait effectué le cross est **inférieure** à 50%.

Par conséquent, **l'intuition du journaliste n'est pas correcte.**

Exercice 3 (X points)

1. Un employé reçoit des appels téléphoniques.
   On estime que la probabilité qu'un appel dure plus de cinq minutes est égale à 0,3.
   On suppose que les durées des différents appels sont indépendants.

   Ce matin, l'employé reçoit deux appels.

Affirmation 1 : *La probabilité que les deux appels durent tous les deux plus de cinq minutes est égale à 0,09.*

L'affirmation est vraie.

Considérons les événements suivants :

- T_1 : le premier appel dure plus de cinq minutes ;
- T_2 : le second appel dure plus de cinq minutes

Nous devons déterminer $P(T_1 \cap T_2)$.

Puisque les événements T_1 et T_2 sont indépendants, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
P(T_1 \cap T_2) &= P(T_1) \times P(T_2) \\
&= 0,3 \times 0,3 \\
&= 0,09
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{P(T_1 \cap T_2) = 0,09}$$

D'où l'**affirmation 1 est vraie.**

Affirmation 2 : *La probabilité qu'un appel exactement sur les deux dure plus de cinq minutes est égale à 0,21.*

L'affirmation est fausse.

Nous devons vérifier si $P\Big((T_1 \cap \overline{T_2}) \cup (\overline{T_1} \cap T_2)\Big) = 0,21$.

Nous obtenons :

$$P\Big((T_1 \cap \overline{T_2}) \cup (\overline{T_1} \cap T_2)\Big) = P(T_1 \cap \overline{T_2}) + P(\overline{T_1} \cap T_2)$$

$$= P(T_1) \times P(\overline{T_2}) + P(\overline{T_1}) \times P(T_2)$$

$$= 0,3 \times 0,7 + 0,7 \times 0,3$$

$$= 0,42$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{P\Big((T_1 \cap \overline{T_2}) \cup (\overline{T_1} \cap T_2)\Big) = 0,42 \neq 0,21}$$

D'où **l'affirmation 2 est fausse.**

2. Le gérant d'une piscine s'intéresse à la présence de bactéries dans l'eau.
Il effectue un prélèvement.
Ce prélèvement montre que la concentration de bactéries est égal à 1000 bactéries par millilitre.
Le seuil maximal autorisé est égal à 1500 bactéries par millilitre.

On admet que la concentration de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(t) = 1,1^t$, où $f(t)$ désigne la concentration, en milliers de bactéries par millilitre, et t désigne la durée, en heure, écoulée depuis que le prélèvement a été effectué.

Affirmation 3 : *La fonction* f *est croissante sur l'intervalle* $[0\,;+\infty[$.
L'affirmation est vraie.

Puisque $1,1 > 1$, **la fonction** f **est croissante sur l'intervalle** $[0\,;+\infty[$.
D'où **l'affirmation 3 est vraie.**

Affirmation 4 : *La concentration de bactéries deux heures après le prélèvement est inférieure au seuil maximal autorisé.*
L'affirmation est vraie.

Nous obtenons :

$$f(2) = 1,1^2$$
$$= 1,21$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{f(2) = 1,21 < 1,5}$$

La concentration de bactéries deux heures après le prélèvement est donc inférieure au seuil maximal autorisé.

D'où **l'affirmation 4 est vraie.**