Correction

Épreuve anticipée de mathématiques - Sujet 0

Enseignement scientifique - 2e sujet

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

1. On considère $A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}$.

Nous obtenons $A=-\frac{1}{6}$.

En effet,

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\\&=\frac{1}{2}-\frac{4}{6}\\&=\frac{3}{6}-\frac{4}{6}\\&=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{A=-\frac{1}{6}}$

La réponse correcte est donc la réponse [b]b. [/b]

2. Quatre croissants coûtent 6 euros.
   Dix croissants coûtent **15 euros.**

En effet, 4 croissants coûtent 6 euros

1 croissant coûte $\frac{6}{4}=1,5$ euro

10 croissants coûtent $10\times1,5=15$ euros.

La réponse correcte est donc la réponse [b]d. [/b]

3. Un prix a doublé. Cela signifie que le prix a augmenté de 100%.

En effet, si le coefficient multiplicateur associé à cette augmentation est $1+t$, alors nous obtenons :

$$\begin{aligned}1+t=2&\Longrightarrow t=2-1\\&\Longrightarrow t=1\\&\Longrightarrow \boxed{t=100\%}\end{aligned}$$

La réponse correcte est donc la réponse [b]b. [/b]

4. À l'issue d'une augmentation de 10%, un article coûte 110 euros.
   Alors **le prix a augmenté de 10 euros.**

Soit P le prix initial de l'article exprimé en euro.
Une augmentation de 10% correspond à un coefficient multiplicateur de 1 + 0,1 = 1,1.
Le prix après augmentation est de 110 euros.

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} 1,1 \times P = 110 \quad &\Longleftrightarrow \quad P = \frac{110}{1,1} \\ &\Longleftrightarrow \quad \boxed{P = 100} \end{aligned}$$

Le prix initial est donc de 100 euros.

Par conséquent, **à l'issue d'une augmentation de 10%, le prix de l'article a augmenté de 110 - 100 = 10 euros.**
La réponse correcte est donc la réponse [b]c. [/b]

5. La masse d'un litre d'huile est égale à 900 grammes.
La masse de 750 millilitres de cette huile est égale à **0,675 kg.**

En effet, la masse de 1000 millilitres d'huile est égale à 900 grammes.
Donc la masse de 1 millilitre de cette huile est égale à 0,9 gramme.
Nous en déduisons que la masse de 750 millilitres de cette huile est égale à $750 \times 0,9 = 675$ grammes, soit $\boxed{0,675\,\text{kg}}$.
La réponse correcte est donc la réponse [b]b. [/b]

6. Dans un repère du plan, on considère les points $A\,(1\,;\,100)$ et $B\,(4\,;\,106)$.
On note m le coefficient directeur de la droite (AB).
On peut affirmer que $m = 2$.

En effet,

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{106 - 100}{4 - 1} \\ &= \frac{6}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{m = 2}$
La réponse correcte est donc la réponse [b]a. [/b]

7. Dans un repère du plan, on considère la droite D de coefficient directeur $-0,1$ passant par le point $A\,(0\,;\,4)$.
On note B le point de la droite D dont l'abscisse est égale à 1.
L'ordonnée du point B est égale à **3,9.**

Le coefficient directeur de la droite D est égal à $-0,1$ et l'ordonnée à l'origine de D est égale à 4.
Donc l'équation réduite de D est $y = -0,1x + 4$.

Le point $B\,(1\,;\,y_B)$ appartient à la droite D. .
Ses coordonnées vérifient alors l'équation de la droite D
D'où : $y_B = -0,1 \times 1 + 4 = -0,1 + 4 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y_B = 3,9}$

Par conséquent, **l'ordonnée du point B est égale à 3,9.**
La réponse correcte est donc la réponse [b]b. [/b]

8. La forme développée de $(x-3)(x+2)$ est x^2-x-6.

En effet,

$$\begin{aligned}(x-3)(x+2) &= x^2+2x-3x-6 \\ &= x^2-x-6\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{(x-3)(x+2)=x^2-x-6}$

La réponse correcte est donc la réponse [b]c. [/b]

9. Le volume V d'un cône de hauteur h et de rayon r est $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$.

En isolant h, nous obtenons : $h=\dfrac{3V}{\pi r^2}$.

En effet,

$$\begin{aligned}V=\frac{1}{3}\pi r^2 h \quad &\Longleftrightarrow \quad 3V=\pi r^2 h \\ &\Longleftrightarrow \boxed{h=\frac{3V}{\pi r^2}}\end{aligned}$$

La réponse correcte est donc la réponse [b]d. [/b]

10. On considère la fonction f définie que $\mathbb{R}$ par $f(x)=-2x^2+3x+1$.
L'image de **-1** par la fonction f est égale à **-4.**

En effet,

$$\begin{aligned}f(-1) &= -2\times(-1)^2+3\times(-1)+1 \\ &= -2\times 1-3+1 \\ &= -2-3+1 \\ &= -4\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{f(-1)=-4}$

La réponse correcte est donc la réponse [b]d. [/b]

11. On considère la fonction f définie que $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2-5x+3$.
Un antécédent de 0 par la fonction f est **1.**

Nous devons trouver une valeur de x dont l'image par f est égale à 0.

Testons la première valeur proposée et calculons $f(1)$.

$$\begin{aligned}f(1) &= 2\times 1^2-5\times 1+3 \\ &= 2-5+3 \\ &= 0\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{f(1)=0}$

D'où **un antécédent de 0 par la fonction f est 1.**
La réponse correcte est donc la réponse [b]a. [/b]

12. On considère les deux séries ci-dessous.
Série A : 9 ; 10 ; 10 ; 11 Série B : 7 ; 10 ; 10 ; 13.
L'écart-type de la série B est strictement supérieur à l'écart-type de la série A.

- La moyenne de la série A est $m_A = \dfrac{9 + 10 + 10 + 11}{4} = 10.$

La moyenne de la série B est $m_B = \dfrac{7 + 10 + 10 + 13}{4} = 10.$
Donc **les deux séries ont la même moyenne.**
Dès lors, les propositions a) et b) sont à écarter.

- Les deux séries ont le même effectif (4) et les mêmes valeurs centrales (10).

Nous observons que les valeurs extrêmes de la série A sont plus proches des valeurs centrales que celles de la série B.
Donc **l'écart-type de la série B est strictement supérieur à l'écart-type de la série A.**
La réponse correcte est donc la réponse [b]d

. [/b]

DEUXIÈME PARTIE (14 pts)

Exercice 1 (X points)
On étudie la croissance d'une population de champignons.

Partie A

Au début de l'expérience, on dispose de 100 champignons. Toutes les 10 minutes, on mesure l'évolution de leur nombre.

On obtient les résultats suivants.

Temps écoulé (en minutes)	Nombre de champignons
0	100
10	125
20	150
30	175

Soit n un entier naturel. On note u_n le nombre de champignons après n périodes de **dix minutes**.
Ainsi $u_0 = 100$, $u_1 = 125$, $u_2 = 150$...

1. Nous devons justifier que les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sont en progression arithmétique.

En effet,

$$\begin{cases} u_1 - u_0 = 125 - 100 \\ u_2 - u_1 = 150 - 125 \\ u_3 - u_2 = 175 - 150 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_0 = 25 \\ u_2 - u_1 = 25 \\ u_3 - u_2 = 25 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \boxed{u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = u_3 - u_2}$$

D'où, **les termes u_0, u_1, u_2, u_3 sont en progression arithmétique.**

2. En supposant que la population de champignons continue d'évoluer selon le même rythme, montrons qu'elle aura quadruplé deux heures après le début de l'expérience.

Deux heures représentent 120 minutes, soit 12 périodes de dix minutes.

Le nombre de champignons après 2 heures est donc u_{12}.

Si la population de champignons continue d'évoluer selon le même rythme, alors la suite (u_n) est une suite arithmétique dont le premier terme est $u_0 = 100$ et la raison est $r = 25$.
Le terme général de la suite (u_n) est $u_n = u_0 + n \times r$.

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} u_{12} &= u_0 + 12 \times r \\ &= 100 + 12 \times 25 \\ &= 400 \\ &= 4 \times u_0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{u_{12} = 4 \times u_0}$$

Par conséquent, **en supposant que la population de champignons continue d'évoluer selon le même rythme, elle aura quadruplé deux heures après le début de l'expérience.**

Partie B

En réalité, on constate que la population de champignons a quadruplé 80 minutes après le début de l'expérience.

De nouvelles mesures donnent les résultats suivants.

Temps écoulé (en minutes)	Nombre de champignons
0	100
40	200
80	400
120	800

Soit n un entier naturel. On note v_n le nombre de champignons après n périodes de **quarante minutes**.

Ainsi $v_0 = 100$, $v_1 = 200$, $v_2 = 400$...

1. Nous devons montrer que les termes v_0, v_1, v_2, v_3 sont en progression géométrique.

En effet,

$$\begin{cases} \dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{200}{100} \\ \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{400}{200} \\ \dfrac{v_3}{v_2} = \dfrac{800}{400} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{v_1}{v_0} = 2 \\ \dfrac{v_2}{v_1} = 2 \\ \dfrac{v_3}{v_2} = 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\dfrac{v_1}{v_0} = \dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{v_3}{v_2}}$$

D'où **les termes** v_0, v_1, v_2, v_3 **sont en progression géométrique.**

2. On suppose que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.
Le graphique susceptible de représenter la suite (v_n) est le graphique 1.

En effet, la suite (v_n) est croissante car la raison $q = 2$ est strictement supérieure à 1 et le premier terme $v_0 = 100$ est strictement positif.
De plus, une suite géométrique présente une allure exponentielle.

Donc **le graphique susceptible de représenter la suite (v_n) est le graphique 1.**

3. Nous devons déterminer le nombre de champignons quatre heures après le début de l'expérience.

Quatre heures représentent 240 minutes, soit 6 périodes de quarante minutes.

Le nombre de champignons après 4 heures est donc u_6.

L'énoncé suppose que la suite (v_n) est une suite géométrique dont le premier terme est $v_0 = 100$ et la raison est $q = 2$.
Le terme général de la suite (v_n) est $v_n = v_0 \times q^n$.

Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} u_6 &= u_0 \times q^6 \\ &= 100 \times 2^6 \\ &= 100 \times 64 \\ &= 6\,400 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \boxed{u_6 = 6\,400}$

Par conséquent, **en supposant que la population de champignons continue d'évoluer selon le même rythme, elle comptera 6 400 champignons quatre heures après le début de l'expérience.**

4. Cinq heures après le début de l'expérience, on dénombre environ 18 000 champignons.

Déterminons si c'est cohérent avec le modèle choisi.

Calculons le nombre de périodes de quarante minutes que constituent 5 heures.

$$\begin{aligned} 5 \text{ heures} &= 5 \times 60 \text{ minutes} \\ &= 300 \text{ minutes} \\ &= 7,5 \times 40 \text{ minutes} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \boxed{5 \text{ heures} = 7,5 \times 40 \text{ minutes}}$

Or $\quad \begin{aligned} v_7 &= 100 \times 2^7 \\ &= 100 \times 128 \\ &= 12\,800 \end{aligned}$

et $\quad \begin{aligned} v_8 &= 100 \times 2^8 \\ &= 100 \times 256 \\ &= 25\,600 \end{aligned}$

Nous observons que $12\,800 < 18\,000 < 25\,600 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{v_7 < 18\,000 < v_8}$

Il est donc cohérent que 5 heures après le début de l'expérience, on dénombre environ 18 000 champignons.

Exercice 2 (X points)
Partie A

Dans un lycée comptant 2 000 élèves, on donne la répartition des effectifs suivant le sexe et le choix de la LV1.

	Fille	Garçon
Anglais	712	728
Autre LV1	288	272

1. Un élève affirme : "*Dans ce lycée, il y a autant de filles que de garçons* ".

Calculons le nombre de filles et le nombre de garçons.

- Nombre de filles : $712 + 288 = \mathbf{1000}$
- Nombre de garçons : $728 + 272 = \mathbf{1000}$

L'élève a raison puisque dans ce lycée, il y a 1000 filles et 1000 garçons

On choisit au hasard, de manière équiprobable, un élève dans ce lycée.
On considère les événements suivants :

F : "*l'élève est une fille*" ;
A : "*l'élève a choisi Anglais pour LV1*".

Dans les questions qui suivent, on donnera les résultats sous forme d'une fraction qu'il n'est pas demandé de simplifier.

2. Déterminons la probabilité de l'événement $A \cap F$.

Nous devons donc déterminer la probabilité que l'élève choisi soit une fille ayant choisi Anglais pour LV1.
Il y a 712 filles ayant choisi Anglais pour LV1 parmi les 2 000 élèves du lycée.

D'où $\boxed{P(A \cap F) = \dfrac{712}{2\,000}}$

3. Déterminons la probabilité de l'événement A sachant que F est réalisé, soit $P_F(A)$.

Il y a 712 filles ayant choisi Anglais pour LV1 parmi les 1 000 filles du lycée.

D'où $\boxed{P_F(A) = \dfrac{712}{1\,000}}$

4. Les événements A et F sont-ils indépendants ?

Les événements A et F sont indépendants si et seulement si $P_F(A) = P(A)$.

- Nous savons que $\boxed{P_F(A) = \dfrac{712}{1\,000}}$.
- Déterminons $P(A)$.

Nombre d'élèves ayant choisi Anglais pour LV1 : $712 + 728 = 1\,440$.

D'où $P(A) = \dfrac{1\,440}{2\,000}$ ou encore $\boxed{P(A) = \dfrac{720}{1\,000}}$

Puisque $\dfrac{712}{1\,000} \neq \dfrac{720}{1\,000}$, nous en déduisons que $P_F(A) \neq P(A)$.
Par conséquent, **les événements A et F ne sont pas indépendants.**

5. On sait que l'élève est un garçon.
Nous devons déterminer si l'affirmation suivante est vraie :

" La probabilité qu'il ait choisi Anglais pour LV1 est plus de trois fois plus grande que la probabilité qu'il n'ait pas choisi Anglais pour LV1 ".

- Sachant que l'élève est un garçon, calculons la probabilité qu'il ait choisi Anglais pour LV1.

Nous devons donc calculer $P_{\overline{F}}(A)$.

Il y a 728 garçons ayant choisi Anglais pour LV1 parmi les 1 000 garçons du lycée.

D'où $\boxed{P_{\overline{F}}(A) = \dfrac{728}{1\,000}}$

- Sachant que l'élève est un garçon, calculons la probabilité qu'il n'ait pas choisi Anglais pour LV1.

Nous devons donc calculer $P_{\overline{F}}(\overline{A})$.

Il y a 272 garçons n'ayant pas choisi Anglais pour LV1 parmi les 1 000 garçons du lycée.

D'où $\boxed{P_{\overline{F}}(\overline{A}) = \dfrac{272}{1\,000}}$

- Analysons l'affirmation.

$$\begin{aligned} 3 \times P_{\overline{F}}(\overline{A}) &= 3 \times \frac{272}{1\,000} \\ &= \frac{816}{1\,000} \\ &> \frac{728}{1\,000} \\ &> P_{\overline{F}}(A) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{P_{\overline{F}}(A) < 3 \times P_{\overline{F}}(\overline{A})}$

Donc la probabilité que le garçon ait choisi Anglais pour LV1 est **inférieure** à trois fois la probabilité qu'il n'ait pas choisi Anglais pour LV1.
Par conséquent, **l'affirmation proposée est fausse.**

Partie B

On dispose d'une pièce de monnaie truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est égale à $\dfrac{1}{4}$.

1. Nous devons déterminer la probabilité d'obtenir face.

Lors du lancer d'une pièce de monnaie, l'ensemble des issues possibles est : $\left\{ \textbf{pile, face} \right\}$

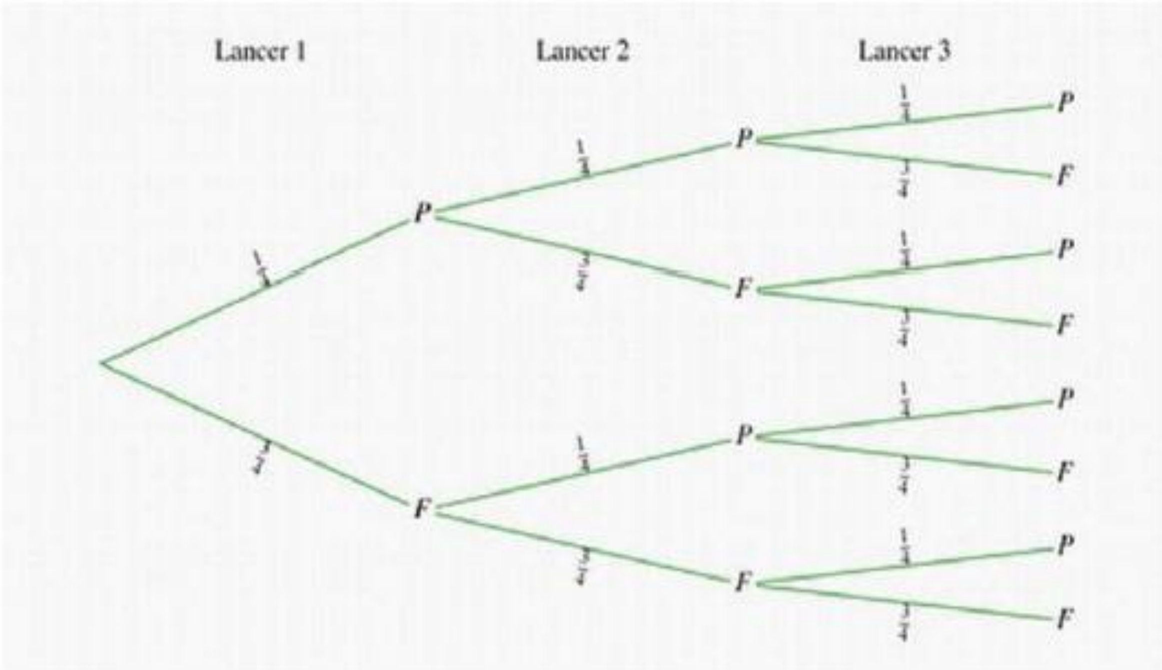
La probabilité d'obtenir pile est égale à $\dfrac{1}{4}$.

Donc la probabilité d'obtenir face est égale à $1 - \dfrac{1}{4} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$

2. On lance trois fois de suite cette pièce de monnaie, les trois lancers étant indépendants, et on note pour chaque lancer le résultat (pile ou face) obtenu.

2. a) Représentons la situation par un arbre de probabilités.

Notons : P l'événement : "obtenir pile"
F l'événement : "obtenir face"



2. b) Nous devons déterminer la probabilité d'obtenir exactement une fois pile lors de ces trois lancers.

Les issues seront notées :

- (P, F, F) pour "obtenir pile au 1er lancer, face au 2ème lancer et face au 3ème lancer
- (F, P, F) pour "obtenir face au 1er lancer, pile au 2ème lancer et face au 3ème lancer
- (F, F, P) pour "obtenir face au 1er lancer, face au 2ème lancer et pile au 3ème lancer

En nous aidant de l'arbre de probabilités, nous obtenons :

- $P(P, F, F) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \implies \boxed{P(P, F, F) = \frac{9}{64}}$
- $P(F, P, F) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \implies \boxed{P(F, P, F) = \frac{9}{64}}$
- $P(F, F, P) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \implies \boxed{P(F, F, P) = \frac{9}{64}}$

Par conséquent, **la probabilité d'obtenir exactement une fois pile lors de ces trois lancers est égale à** $\frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} = \boxed{\frac{27}{64}}$

2. c) Nous devons déterminer la probabilité de ne jamais obtenir pile.

"Ne jamais obtenir pile" revient à "obtenir trois fois face".

Or $P(F,F,F)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{P(F,F,F)=\frac{27}{64}}$

Donc **la probabilité de ne jamais obtenir pile est égale à** $\boxed{\frac{27}{64}}$.

Merci à Hiphigenie et malou pour cette contibution.