Correction

Épreuve anticipée de mathématiques - Sujet 0

Spécialité Maths - 1er sujet

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

QUESTION 1 - **Réponse** b.

Le double d'un nombre réel a est $2a$ et l'inverse d'un nombre réel non nul b est $\frac{1}{b}$.

Donc, le double de 5 est $2 \times 5 = 10$ et l'inverse du double de 5 est $\frac{1}{10}$.

QUESTION 2 - **Réponse** a.

On considère la valeur $F = a + \frac{b}{cd}$.

Calculons F lorsque $a = \frac{1}{2}$, $b = 3$, $c = 4$, $d = -\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
F &= a + \frac{b}{cd} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{-1} \\
&= \frac{1}{2} - 3 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{6}{2} \\
&= -\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

QUESTION 3 - **Réponse** a.

Soit x le prix d'un article.
Supposons que ce prix soit multiplié par $0,975$.

Nous obtenons ainsi : $0,975x = x - 0,025x$.

Donc $0,975x$ est égal à x diminué de $2,5\%$ de x.

Par conséquent, si le prix d'un article est multiplié par $0,975$, cela signifie que le prix de cet article a connu une baisse de $2,5\%$.

QUESTION 4 - **Réponse** c.

Le prix d'un article est noté P.
Ce prix augmente de 10%.
Le coefficient multiplicateur est alors égal à $1 + 0,1 = 1,1$.

Après cette augmentation, le prix de l'article est : $1,1 \times P$.
Ce prix diminue alors de 10%.
Le coefficient multiplicateur est alors égal à $1 - 0,1 = 0,9$.

Après cette diminution, le prix de l'article est : $0,9 \times (1,1 \times P) = 0,99P$.

Donc à l'issue de ces deux variations, le nouveau prix est noté P_1 et $P_1 = 0,99P$.
Or sachant que P est un nombre réel positif, nous avons : $0,99P < P$.

D'où $\boxed{P_1 < P}$.

QUESTION 5 - **Réponse a.**

On lance un dé à 4 faces. La probabilité d'obtenir chacune des faces est donnée dans le tableau ci-dessous :

Face numéro 1	Face numéro 2	Face numéro 3	Face numéro 4
$0,5$	$\frac{1}{6}$	$0,2$	x

Nous devons rechercher la valeur de x.

La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
Dès lors, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
0,5 + \frac{1}{6} + 0,2 + x = 1 &\iff x = 1 - 0,7 - \frac{1}{6} \\
&\iff x = 0,3 - \frac{1}{6} \\
&\iff x = \frac{3}{10} - \frac{1}{6} \\
&\iff x = \frac{9}{30} - \frac{5}{30} \\
&\iff x = \frac{4}{30} \\
&\iff \boxed{x = \frac{2}{15}}
\end{aligned}$$

QUESTION 6 - **Réponse a.**

On considère x, y, u des réels non nuls tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{u}$.

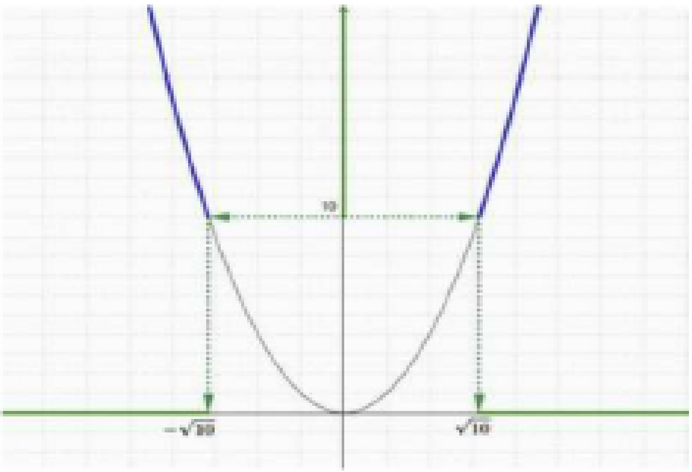
Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &\iff \frac{1}{u} = \frac{y+x}{xy} \\
&\iff \boxed{u = \frac{xy}{x+y}} \quad (\text{en supposant que } x + y \neq 0)
\end{aligned}$$

QUESTION 7 - **Réponse b.**

On a représenté ci-dessous la parabole d'équation $y = x^2$.

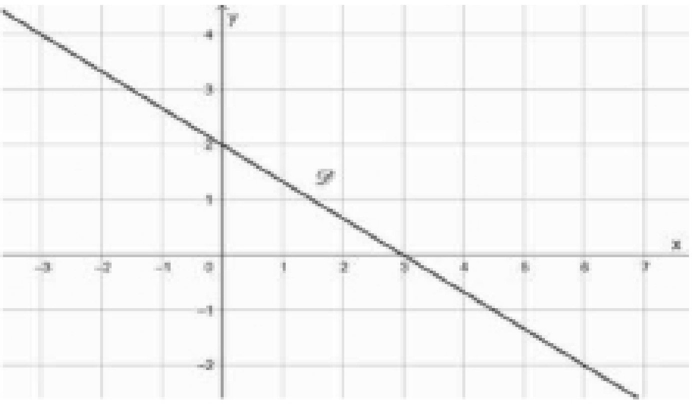
Résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 \geqslant 10$ revient à déterminer les abscisses des points de la parabole d'ordonnée supérieure ou égale à 10.



Dès lors, nous obtenons : $x^2 \geqslant 10 \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{x \leqslant -\sqrt{10} \quad \text{ou} \quad x \geqslant \sqrt{10}}$

QUESTION 8 - **Réponse d.**

On a représenté ci-dessous une droite $\mathscr{D}$ dans un repère orthonormé.



Déterminons une équation de cette droite $\mathscr{D}$.

L'équation réduite de $\mathscr{D}$ est de la forme $y = ax + b$.

Déterminons le coefficient directeur a.
Par lecture graphique, la droite $\mathscr{D}$ semble passer par les points $A(0\,;\,2)$ et $B(3\,;\,0)$

Dès lors, nous obtenons :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$= \frac{0-2}{3-0}$$
$$= -\frac{2}{3}$$
$$\longrightarrow \quad \boxed{a = -\frac{2}{3}}$$

Déterminons l'ordonnée à l'origine b.

Puisque $A(0\,;\,2)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$, l'ordonnée à l'origine est $\boxed{b=2}$

Nous en déduisons que l'équation réduite de $\mathscr{D}$ est de $y=-\dfrac{2}{3}x+2$.

Transformons cette équation car elle ne figure pas dans les propositions de l'énoncé.

$$\begin{aligned} y=-\frac{2}{3}x+2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{3}x+y-2=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y-1=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{x}{3}+\frac{y}{2}-1=0} \end{aligned}$$

QUESTION 9 - **Réponse b.**

- Soit la fonction f_1 une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2-(1-x)^2$.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2-(1-x)^2 \\ &= x^2-(1-2x+x^2) \\ &= x^2-1+2x-x^2 \\ &= -1+2x \end{aligned}$$

$\longrightarrow \quad \boxed{f_1(x)=2x-1}$

Nous observons que $f_1(x)$ est de la forme $f_1(x)=ax+b$ avec a et b réels.
D'où f_1 est une fonction affine.

- Soit la fonction f_2 une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{x}{2}-\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$f_2(x)=\frac{x}{2}-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\longrightarrow \quad \boxed{f_2(x)=\dfrac{1}{2}x-\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

Nous observons que $f_2(x)$ est de la forme $f_2(x)=ax+b$ avec a et b réels.
D'où f_2 est une fonction affine.

- Soit la fonction f_3 une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{5-\frac{2}{3}x}{0,7}$.

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \frac{5-\frac{2}{3}x}{0,7} \\ &= \frac{5}{0,7}-\frac{2}{3\times 0,7}x \\ &= \frac{5}{0,7}-\frac{2}{2,1}x \\ &= \frac{50}{7}-\frac{20}{21}x \end{aligned}$$

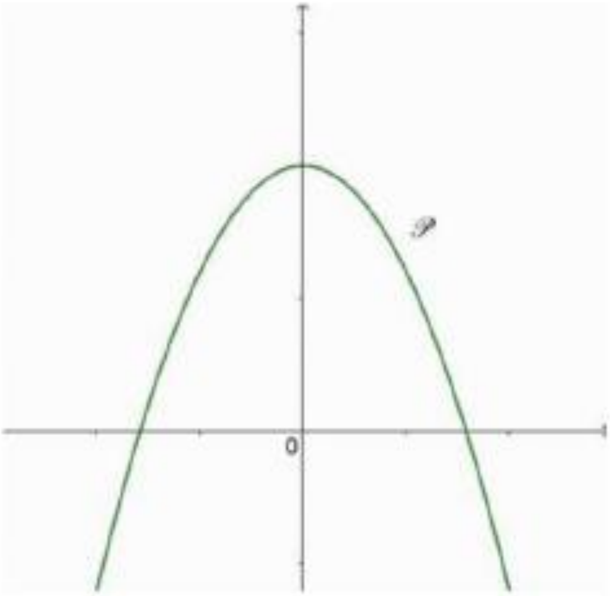
$\longrightarrow \quad \boxed{f_3(x)=-\dfrac{20}{21}x+\dfrac{50}{7}}$

Nous observons que $f_3(x)$ est de la forme $f_3(x)=ax+b$ avec a et b réels.
D'où f_3 est une fonction affine.

- Par conséquent, les trois fonctions proposées dans l'énoncé sont des fonctions affines.

QUESTION 10 - **Réponse c.**

On a représenté ci-dessous une parabole $\mathscr{P}$.



Cette parabole coupe l'axe des ordonnées en un point d'ordonnée positive.
La seule fonction susceptible d'être représentée par la parabole $\mathscr{P}$ est la fonction $x \mapsto -x^2 + 10$.
En effet, l'image de 0 par cette fonction est égale à 10 et par suite, la parabole représentant cette fonction coupe alors l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;\,10)$.

Les fonctions définies en a., b. et d. sont représentées par des paraboles coupant l'axe des ordonnées aux points de coordonnées respectives $(0\,;\,-10)$, $(0\,;\,-10)$ et $(0\,;\,0)$, ce qui n'est manifestement pas le cas sur la figure.

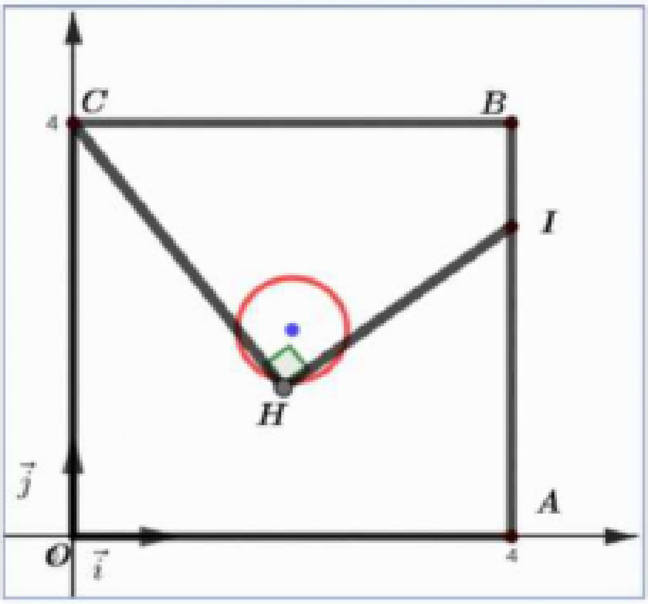
Par conséquent, **la réponse correcte est la réponse c.**

****

DEUXIÈME PARTIE (14 pts)

Exercice 1 (X points)

On considère la figure suivante, représentée dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.



On dispose des données suivantes :

- Le quadrilatère $OABC$ est un carré de côté 4 ;
- On a : $A(4;0)$, $B(4;4)$, $C(0;4)$, $I(4;3)$;
- Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI);
- On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre $D(2;2)$ et de rayon 0,5.

1. a) Déterminons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC}$.

Nous avons : $I(4;3) \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}}$ et $C(0;4) \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}}$

1. b) Nous devons en déduire le produit scalaire $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC}$.

Puisque le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est orthonormé, nous obtenons :

$$\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC} = 4\times 0 + 3\times 4 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC} = 12}$$

2. a) Exprimons le produit scalaire $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC}$ en fonction des longueurs OH et OI.

Par définition, le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI).
Dès lors, $\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OH}$

Or $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens.

Par conséquent, $\boxed{\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC} = OI\times OH}$

2. b) Nous devons calculer la longueur OI.

$$\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad OI = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$\Longrightarrow \boxed{OI = 5}$$

2. c) Nous devons en déduire que $OH = 2,4$.

$$\begin{cases}\overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC}=12\\ \overrightarrow{OI}\cdot\overrightarrow{OC}=OI\times OH\end{cases} \longrightarrow \boxed{OI\times OH=12}$$

$$\begin{cases}OI\times OH=12\\ OI=5\end{cases} \longrightarrow 5\times OH=12$$

$$\Longrightarrow OH=\frac{12}{5}$$

$$\Longrightarrow \boxed{OH=2,4}$$

3. a) Nous devons déterminer une équation cartésienne de la droite (CH).

Puisque le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI), nous en déduisons que le vecteur $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (CH).

D'où une équation de la droite (CH) est de la forme $4x+3y+c=0$ où c est un nombre réel.

Nous savons que $C(0\ ;\ 4)$ appartient à cette droite.
Donc $0+3\times 4+c=0$, soit $c=-12$.

Par conséquent, **une équation cartésienne de la droite (CH) est** $\boxed{4x+3y-12=0}$.

3. b) Déterminons une équation du cercle $\mathscr{C}$.

Une équation du cercle de centre $\Omega(a\ ;\ b)$ et de rayon r est : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

D'où une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $D(2;2)$ et de rayon 0,5 est : $(x-2)^2+(y-2)^2=0,5^2$.

Développons cette équation.

$$(x-2)^2+(y-2)^2=0,5^2 \iff x^2-4x+4+y^2-4y+4=0,25$$
$$\iff \boxed{x^2+y^2-4x-4y+7,75=0}$$

Par conséquent, **une équation du cercle $\mathscr{C}$ est :** $\boxed{x^2+y^2-4x-4y+7,75=0}$

3. c) Déterminons si le point $M(1,5\ ;\ 2)$ appartient à l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite (CH).

- Montrons que les coordonnées du point M vérifient l'équation du cercle $\mathscr{C}$.

En effet, $1,5^2+2^2-4\times 1,5-4\times 2+7,75=2,25+4-6-8+7,75=0$

- Montrons que les coordonnées du point M vérifient l'équation de la droite (CH).

En effet, $4\times 1,5+3\times 2-12=6+6-12=0$

- Par conséquent, **le point $M(1,5\ ;\ 2)$ appartient à l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite** (CH).

Exercice 2 (X points)

On se place dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthogonal.

1. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x)=x^2-5x+4$.
On note $\mathscr{P}$ la courbe représentative de la fonction g.

1. a) Nous devons étudier le signe de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

<u>Discriminant de x^2-5x+4</u> : $\Delta = (-5)^2 - 4\times 1\times 4$
$= 25-16$
$= 9 > 0$

<u>Racines de x^2-5x+4</u> : $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{9}}{2} = \dfrac{5-3}{2} = 1$

$x_2 = \dfrac{5+\sqrt{9}}{2} = \dfrac{5+3}{2} = 4$

Le coefficient principal de x^2-5x+4 est $1>0$.

Nous pouvons alors dresser le tableau de signes de $g(x) = x^2-5x+4$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$g(x) = x^2-5x+4$		+	0	$-$	0	+	

Donc **pour tout** $x \in]-\infty\ ;\ 1[\cup]4\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$;
pour tout $x \in]1\ ;\ 4[$, $g(x) < 0$;
$g(1) = g(4) = 0$.

1. b) On considère un entier naturel n quelconque.
On note A_n le point de la courbe $\mathscr{P}$ d'abscisse n.
On note a_n le coefficient directeur de la droite (A_nA_{n+1}).

Nous devons justifier que pour tout entier naturel n, on a $a_n = 2n-4$.

Pour tout entier naturel n, A_n est le point de la courbe $\mathscr{P}$ d'abscisse n.
Donc les coordonnées du point A_n sont $(n\ ;\ g(n))$.

Nous en déduisons que le coefficient directeur de la droite (A_nA_{n+1}). est donné par :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{g(n+1)-g(n)}{(n+1)-n} \\ &= \frac{\Big((n+1)^2-5(n+1)+4\Big)-(n^2-5n+4)}{1} \\ &= n^2+2n+1-5n-5+4-n^2+5n-4 \\ &= 2n-4 \end{aligned}$$

$\longrightarrow$ $\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\quad a_n = 2n-4}$

1. c) La suite (a_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme égal à -4.

2. On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$ par $f(x) = x-5+\dfrac{4}{x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

2. a) Nous devons vérifier que pour tout x de l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$, on a : $f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$

Pour tout x de l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$,

$$\begin{aligned}f(x) &= x-5+\frac{4}{x}\\ &= \frac{x^2-5x+4}{x}\\ &= \frac{g(x)}{x}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\forall\, x \in [0,5\ ;\ 8],\quad f(x)=\frac{g(x)}{x}}$

2. b) Nous devons déterminer la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
Cela revient à étudier le signe de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

Puisque x est strictement positif sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$, le signe de f est le signe de g étudié dans la question 1. a).

Nous obtenons ainsi le tableau de signes de $f(x)$ sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

x	$0,5$		1		4		8
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent,

sur l'ensemble $[0,5\ ;\ 1[\cup]4\ ;\ 8]$, la courbe $\mathscr{C}$ est strictement au-dessus de l'axe des abscisses,
sur l'intervalle $]1\ ;\ 4[$, la courbe $\mathscr{C}$ est strictement en dessous de l'axe des abscisses,
aux points d'abscisses 1 et 4, la courbe $\mathscr{C}$ coupe de l'axe des abscisses.

2. c) On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.
Déterminons $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

Pour tout x de l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(x-5+\frac{4}{x}\right)'\\ &= 1-\frac{4}{x^2}\\ &= \frac{x^2-4}{x^2}\\ &= \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\forall\, x \in [0,5\ ;\ 8],\quad f'(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{x^2}}$

2. d) Nous devons en déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

Etudions le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

Remarquons que $x \in [0,5\ ;\ 8] \quad \Longrightarrow \begin{cases} x+2>0\\ x^2>0\end{cases}$

Dès lors, le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x-2)$.
D'où le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\ ;\ 8]$.

$$\begin{array}{lcl} x-2=0 & \Longrightarrow & x=2 \\ x-2<0 & \Longrightarrow & x<2 \\ x-2>0 & \Longrightarrow & x>2 \end{array}$$

$$f(0,5)=0,5-5+\frac{4}{0,5}=3,5$$

$$f(2)=2-5+\frac{4}{2}=-1$$

$$f(8)=8-5+\frac{4}{8}=3,5$$

x	$0,5$		2		8
$x-2$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$3,5$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$3,5$

2. e) Allure de la courbe $\mathscr{C}$.