Correction

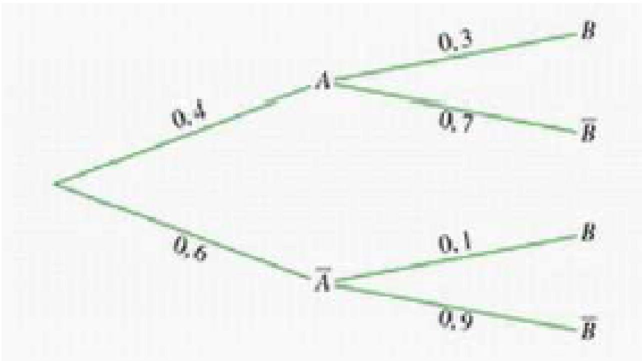
Épreuve anticipée de mathématiques - Sujet 0

Spécialité Maths - 2e sujet

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

QUESTION 1 - **Réponse** A.

On considère l'arbre de probabilité complété ci-dessous.



Nous devons déterminer la probabilité de l'événement B.

Les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers.
En utilisant la formule des probabilités totales, nous obtenons :

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) \\ &= p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B) \\ &= 0,4 \times 0,3 + 0,6 \times 0,1 \\ &= 0,18 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \boxed{p(B) = 0,18}$

Par conséquent, **la probabilité de l'événement B est égale à** [b]**0,18**.[/b]

QUESTION 2 - **Réponse** A.

Une tablette coûte 200 euros. Son prix diminue de 30%.
Déterminons le prix après cette diminution.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de 30% est $1 - 0,3 = 0,7$.
Donc **le prix de la tablette après la réduction de 30% est** $0,7 \times 200$ **euros, soit 140 euros.**

QUESTION 3 - **Réponse** B.

Une réduction de 50% est suivie d'une augmentation de 50%.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une réduction de 50% est $1 - 0,5 = 0,5$.
Le coefficient multiplicateur correspondant à une augmentation de 50% est $1 + 0,5 = 1,5$.

D'où le coefficient multiplicateur global est $1,5 \times 0,5 = 0,75$.
Ce coefficient multiplicateur est égal à $1 - 0,25$, ce qui correspond à une **réduction de 25%.**

QUESTION 4 - **Réponse** B.

Dans un lycée, le quart des élèves sont internes, parmi eux, la moitié sont des filles.

La proportion des filles internes par rapport à l'ensemble des élèves du lycée est égale à la moitié du quart.

Or $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8} = 0,125$.

Donc **la proportion des filles internes par rapport à l'ensemble des élèves est de 12,5%.**

QUESTION 5 - **Réponse** D.

On considère le nombre $N = \dfrac{10^7}{5^2}$.

$$\begin{aligned} N &= \frac{10^7}{5^2} \\ &= \frac{10^2 \times 10^5}{5^2} \\ &= \frac{100 \times 10^5}{25} \\ &= \frac{100}{25} \times 10^5 \\ &= 4 \times 10^5 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \boxed{N = 4 \times 10^5}$

QUESTION 6 - **Réponse** B.

Un appareil a besoin d'une énergie de $7,5 \times 10^6$ Joules (J) pour se mettre en route.
Nous devons déterminer à combien de kiloWatts-heure (kWh) cela correspond sachant que 1 kWh $= 3,6 \times 10^6$ J.

Dressons un tableau de proportionnalité.

kWh	1	x
J	$3,6 \times 10^6$	$7,5 \times 10^6$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} 1 \times 7,5 \times 10^6 = 3,6 \times 10^6 \times x \quad &\Longleftrightarrow \quad 7,5 = 3,6x \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{7,5}{3,6} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{75}{36} = \frac{25}{12} \\ &\Longleftrightarrow \quad \boxed{x \approx 2,08} \end{aligned}$$

QUESTION 7 - **Réponse** C.

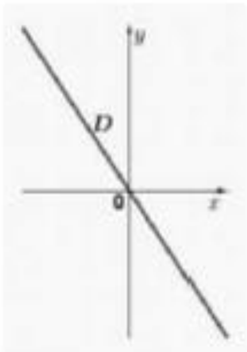
Le plan est muni d'une repère orthogonal.
On note d la droite passant par les points $A(0;-1)$ et $B(2;5)$.
Déterminons le coefficient directeur a de la droite d.

$$\begin{aligned} a &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \\ &= \frac{5-(-1)}{2-0} \\ &= \frac{5+1}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \boxed{a = 3}$

QUESTION 8 - **Réponse** C.

On a représenté ci-dessous une droite D.



Déterminons l'équation susceptible de représenter la droite D.

La droite D passe par le point de cordonnées $(0;0)$.
Les équations $2x+y+1=0$ et $y=2x-1$ ne sont pas vérifiées pour $(x;y)=(0;0)$.
Nous écartons donc les réponses B et D.

La fonction représentant la droite D est décroissante.
Le coefficient directeur de D est donc négatif, ce qui n'est pas le cas pour la réponse A. puisque l'équation peut s'écrire $y=2x$ et le coefficient directeur est le nombre positif 2.

Par conséquent, **la réponse correcte est la réponse C.**

QUESTION 9 - **Réponse** C.

On note S l'ensemble des solutions de l'équation $x^2=10$ sur $\mathbb{R}$.

Nous avons : $x^2=10 \iff x=-\sqrt{10}$ ou $x=\sqrt{10}$
Dès lors, $\boxed{S=\{-\sqrt{10}\,;\,\sqrt{10}\}}$

QUESTION 10 - **Réponse** A.

Déterminons le tableau de signes de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3x-15)(x+2)$

$$\begin{aligned} 3x - 15 = 0 &\iff 3x = 15 \\ &\iff x = 5 \\ 3x - 15 < 0 &\iff x < 5 \\ 3x - 15 > 0 &\iff x > 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2 = 0 &\iff x = -2 \\ x + 2 < 0 &\iff x < -2 \\ x + 2 > 0 &\iff x > -2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$3x - 15$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$(3x - 15)(x + 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

soit le tableau non détaillé :

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

QUESTION 11 - **Réponse** C.

Déterminons l'expression développée de $(2x + 0,5)^2$.

$$(2x + 0,5)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 0,5 + (0,5)^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{(2x + 0,5)^2 = 4x^2 + 2x + 0,25}$$

QUESTION 12 - **Réponse** C.

Lorsqu'un point mobile suit une trajectoire circulaire de rayon R, en mètre (m), son accélération centripète a (en m/s^2) s'exprime en fonction de sa vitesse v (en m/s) de la manière suivante : $a = \dfrac{v^2}{R}$.

Déterminons l'expression permettant d'exprimer la vitesse v.

$$\begin{aligned} a = \frac{v^2}{R} &\iff v^2 = ar \\ &\iff \boxed{v = \sqrt{ar}} \quad (v \geqslant 0) \end{aligned}$$

****

DEUXIÈME PARTIE (14 pts)

Exercice 1 (X points)

En 2020, une ville comptait 10 000 habitants.

On modélise l'évolution du nombre d'habitants de cette ville par la suite (u_n) définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,08u_n - 300, & n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 10\,000 \end{cases}$$

où u_n représente le nombre d'habitants pour l'année $2020 + n$.

1. u_1 représente le nombre d'habitants que compte la ville en 2021.

$$\begin{aligned} u_1 &= 1,08 \times u_0 - 300 \\ &= 1,08 \times 10\,000 - 300 \\ &= 10\,800 - 300 \\ &= 10\,500 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{u_1 = 10\,500}$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3\,750$.

2. a) Déterminons v_0.

$$\begin{cases} v_0 = u_0 - 3\,750 \\ u_0 = 10\,000 \end{cases} \Longrightarrow v_0 = 10\,000 - 3\,750$$

$$\Longrightarrow \boxed{v_0 = 6\,250}$$

2. b) Nous devons démontrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 1,08\,v_n$.

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3\,750 \\ &= 1,08\,u_n - 300 - 3\,750 \\ &= 1,08\,u_n - 4\,050 \\ &= 1,08\,u_n - 18 \times 3\,750 \\ &= 1,08\,(u_n - 3\,750) \\ &= 1,08\,v_n \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 1,08\,v_n}$

2. c) Nous en déduisons que **la suite** (v_n) **est géométrique de raison** $q = 1,08$ **et de premier terme** $v_0 = 6\,250$.

2. d) Pour tout entier naturel n, exprimons v_n en fonction de n.

Le terme général de la suite (v_n) est $v_n = v_0 \times q^n$.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_n = 6\,250 \times 1,08^n}$

2. e) Nous devons en déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 6\,250 \times 1,08^n + 3750$.

En effet, nous obtenons :

$$\begin{cases} v_n = u_n - 3\,750 \\ v_n = 6\,250 \times 1,08^n \end{cases} \Longrightarrow u_n - 3\,750 = 6\,250 \times 1,08^n$$

$$\Longrightarrow \boxed{u_n = 6\,250 \times 1,08^n + 3\,750}$$

3. La municipalité envisage d'ouvrir une nouvelle école maternelle dès que la population atteindra 19 000 habitants.
Selon le tableau, la population dépasse 19 000 habitants pour la première fois lorsque $n = 12$.
L'année correspondant au rang $n = 12$ se détermine par : 2020 + 12 = 2032.
Or la construction d'un tel établissement nécessite deux ans.

Par conséquent, **la construction de l'école doit commencer en 2030.**

Exercice 2 (X points)
Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Partie A

On considère la fonction P définie sur l'intervalle [-5 ; 3] par : $P(x) = 2x^2 + x - 10$.

1. a) Nous devons déterminer les racines de P.

Discriminant de $2x^2 + x - 10$: $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-10)$
$= 1 + 80$
$= 81 > 0$

Racines de P : $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{81}}{2 \times 2} = \dfrac{-1-9}{4} = -\dfrac{10}{4} = -2,5 \in [-5\ ;\ 3]$

$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{81}}{2 \times 2} = \dfrac{-1+9}{4} = \dfrac{8}{4} = 2 \in [-5\ ;\ 3]$

D'où **les racines de P sont -2,5 et 2.**

1. b) Nous devons en déduire l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = P(x)$.

L'axe de symétrie de la parabole passe par le point de coordonnées $(\alpha\ ;\ 0)$ où $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = \dfrac{-2,5+2}{2} = -0,25$.

Par conséquent, **l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = P(x)$ est la droite d'équation** $\boxed{x = -0,25}$

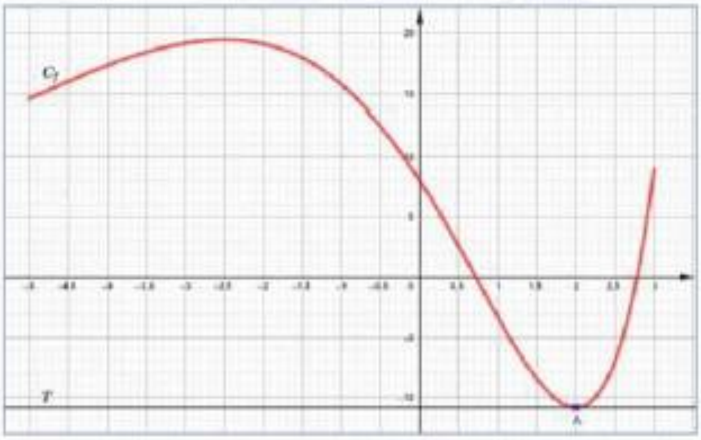
2. Nous devons établir le tableau de signe de la fonction P sur l'intervalle [-5 ; 3].

La fonction P admet deux racines : -2,5 et 2.
Le coefficient principal de $2x^2 + x - 10$ est $2 > 0$.
Nous obtenons ainsi le tableau de signe de la fonction P sur l'intervalle [-5 ; 3].

x	-5		$-2,5$		2		3
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5\ ;\ 3]$ dont on donne ci-dessous la courbe représentative C_f.



La tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 2 est horizontale.

1. Nous devons donner la valeur du nombre dérivé $f'(2)$.

$f'(2)$ représente le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f au point A d'abscisse 2.
Nous savons que la tangente T est horizontale et par suite que son coefficient directeur est nul.

Par conséquent, $\boxed{f'(2) = 0}$.

2. Nous devons résoudre l'inéquation $f'(x) < 0$.

Avec la précision permise par le graphique, la fonction f semble être strictement décroissante sur l'intervalle]-2,5 ; 2[.

Dès lors, **l'ensemble des solutions de l'inéquation** $f'(x) < 0$ **est l'intervalle** $]-2,5\,;\,2[$.

3. On sait que la fonction f a pour expression sur l'intervalle [-5 ; 3] : $f(x) = (4x^2 - 14x + 8)\mathrm{e}^{0,5x}$.

Nous devons démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle [-5 ; 3], on a : $f'(x) = P(x)\mathrm{e}^{0,5x}$.

Pour tout x appartenant à l'intervalle [-5 ; 3],

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[(4x^2 - 14x + 8)\mathrm{e}^{0,5x}\right]' \\
&= (4x^2 - 14x + 8)' \times \mathrm{e}^{0,5x} + (4x^2 - 14x + 8) \times (\mathrm{e}^{0,5x})' \\
&= (8x - 14) \times \mathrm{e}^{0,5x} + (4x^2 - 14x + 8) \times 0,5\,\mathrm{e}^{0,5x} \\
&= \left[(8x - 14) + 0,5\,(4x^2 - 14x + 8)\right]\mathrm{e}^{0,5x} \\
&= (8x - 14 + 2x^2 - 7x + 4)\,\mathrm{e}^{0,5x} \\
&= (2x^2 + x - 10)\,\mathrm{e}^{0,5x} \\
&= P(x)\,\mathrm{e}^{0,5x}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\forall\, x \in [-5\,;3]\,, \quad f'(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{0,5x}}$$

4. Nous devons dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [-5 ; 3].

Puisque l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $P(x)$ étudié dans la partie A.

Nous obtenons ainsi le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [-5 ; 3].

x	-5		$-2,5$		2		3
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons le tableau de variation de f sur l'intervalle [-5 ; 3] (*Il n'est pas demandé de calculer les images*).

x	-5		$-2,5$		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Merci à Hiphigenie et malou pour cette contribution